ЛЕКЦИЯ 7

Глава 7. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О КРИВЫХ ЛИНИЯХ И КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

7.1. Кривые линии и их проекции

Линию можно рассматривать как множество последовательных положений движущейся точки – траекторию точки.

Кривая – разновидность линии, которая получается, когда движущая точка изменяет направление своего движения. Кривая линия может являться результатом пересечения кривой поверхности плоскостью или кривых поверхностей между собой.

В начертательной геометрии кривые линии изучаются по их проекциям. Если все точки кривой лежат в одной плоскости, кривую называют плоской, в противном случае – пространственной.

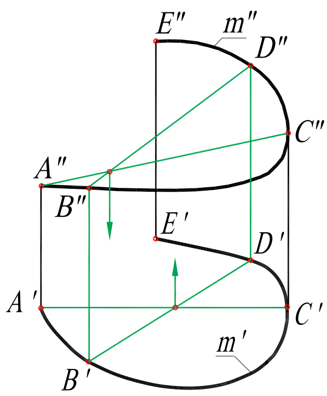


Рис. 7.1

Чтобы установить по чертежу, какая задана кривая (плоская или пространственная), необходимо определить, принадлежат ли все точки кривой одной плоскости.

Заданная на рис. 7.1 кривая линия m (m', m'') – пространственная, так как точки A, B, C, D не принадлежат одной плоскости (прямые AC и BD, которые соединяют точки A и C, B и D, лежащие на кривой m, являются скрещивающимися). Кривые линии разделяют на алгебраические (определяемые в декартовых координатах алгебраическими уравнениями) и трансцендентные (определяемые неалгебраическими уравнениями).

Порядком алгебраической кривой называют наибольшую степень ее уравнения.

Геометрический порядок плоской кривой определяется наибольшим числом точек пересечения ее с прямой линией, а пространственной кривой – наибольшим числом точек пересечения ее с плоскостью. При проецировании порядок алгебраической кривой в общем случае сохраняется.

Все плоские кривые разделяются на циркульные, состоящие из сопряженных дуг окружностей (их проводят при помощи циркуля), и лекальные, вычерчивающиеся с помощью лекала по предварительно построенным точкам.

7.2. Некоторые кривые, часто встречающиеся в практике

Рассмотрим построение некоторых плоских алгебраических кривых (эллипса, гиперболы, параболы), трансцендентных (спираль Архимеда, эвольвенту окружности, синусоиду), а также пространственных винтовых линий.

Эллипс (рис.7.2) – плоская замкнутая кривая, у которой сумма расстояний от любой ее точки (например, от точки M) до двух заданных точек F_1 и F_2 (фокусов эллипса) есть величина постоянная, равная большой оси эллипса AB ($F_1M + F_2M = AB$). Отрезок CD – малая ось эллипса, точка O – центр эллипса. Точки F_1 и F_2 расположены на большой оси AB симметрично относительно точки O и удалены от концов малой оси (точек C и D) на расстояние, равное половине большой оси эллипса.

Существует ряд способов построения эллипса. Наиболее просто построить эллипс по двум его осям при помощи вспомогательных окружностей (рис. 7.3).

Из центра проводят две окружности радиусами, равными половине большой и малой осей. Большую окружность делят на 12 равных частей и точки деления соединяют с точкой O.

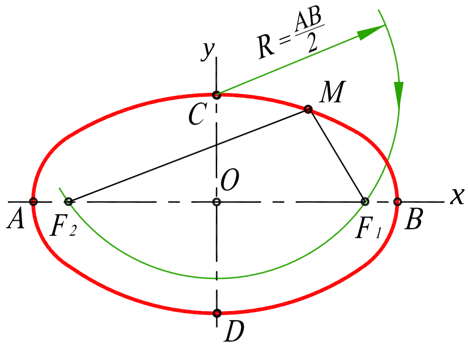


Рис. 7.2

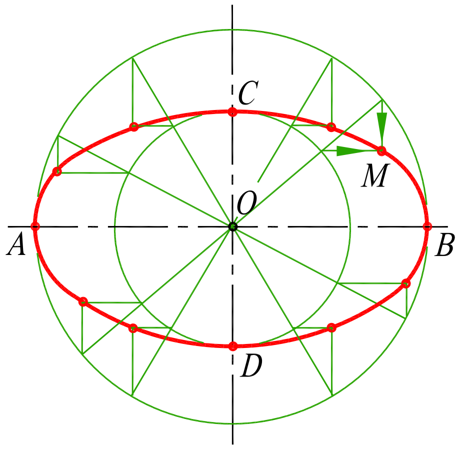


Рис. 7.3

Через точки деления меньшей окружности проводят прямые, параллельные большой оси эллипса, а через точки деления большей окружности – прямые, параллельные малой оси. Точки пересечения (например, точка *M*) соединяют плавной кривой.

Окружность – частный вид эллипса, у которого полуоси равны между собой и являются радиусом окружности.

Гипербола (рис. 7.4) – кривая, у которой разности расстояний от любой ее точки (например, от точки *M*) до двух заданных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, равная *AB*. Гипербола имеет две ветви, действительную ось *x* и мнимую ось *y*, центр *O*, вершины *A* и *B*.

На рис. 7.4 показано построение точки *M* гиперболы по действительной оси *AB* и фокусам F_1 и F_2. Из фокусов, как из центров, проводим дуги окружностей соответственно радиусом *R* и *R* + *AB*. Точка их пересечения является точкой гиперболы. Изменяя радиус *R* и повторяя построения, получаем новые точки гиперболы.

Парабола (рис. 7.5) – кривая, каждая точки которой (например, точка *M*) равноудалена от заданной точки *F* (фокуса) и прямой *d* (директриссы), (*FM* = *NM*). Расстояние *FO* от фокуса *F* до директриссы *d* – параметр параболы (*P*), *x* – ось параболы, точка *A* – вершина параболы.

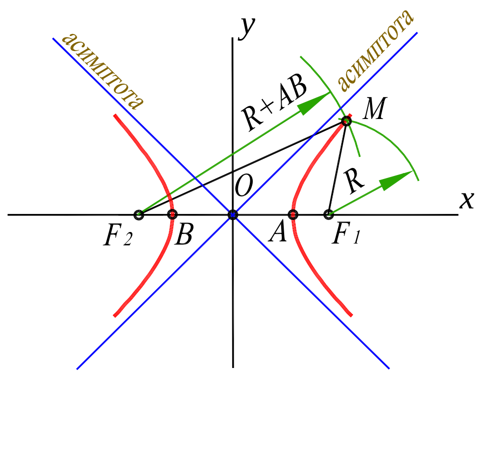


Рис. 7.4

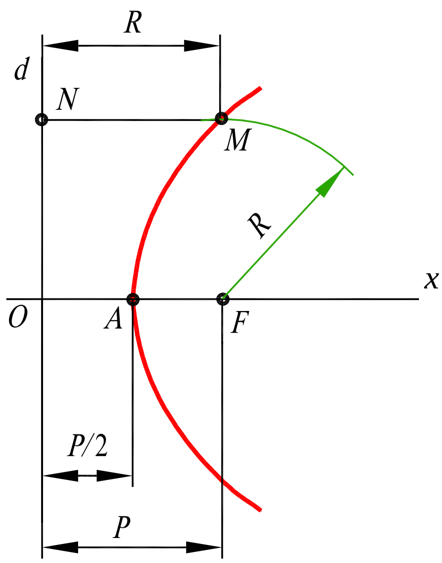


Рис. 7.5

На рис. 7.5 показано построение точки *M* параболы по заданным фокусу (*F*) и директриссе (*d*). Из фокуса *F* делаем засечку дугой радиуса *R* на прямой, удаленной от директриссы *d* на расстояние *R*, причем *R* > *P*/2. Изменяя величину *R* и повторяя построения, получаем новые точки параболы.

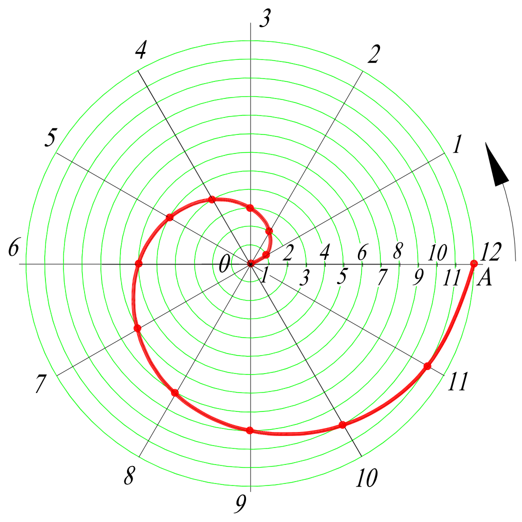


Рис. 7.6

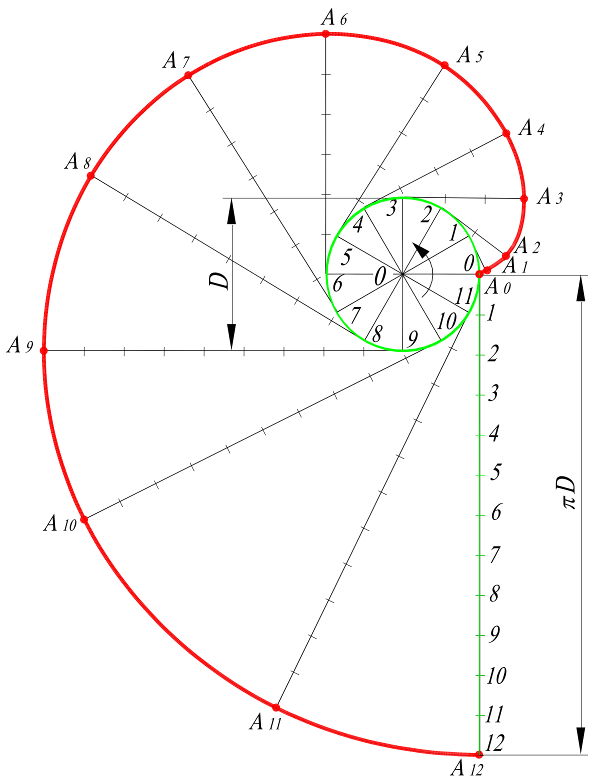


Рис. 7.7

Спираль Архимеда (рис. 7.6) – кривая, которую описывает точка, равномерно вращающаяся вокруг неподвижной точки (полюса O) и одновременно равномерно удаляющаяся от него. Расстояние OA, пройденное точкой от полюса O при повороте на 360° – шаг спирали.

Точки, принадлежащие спирали Архимеда, строят исходя из определения кривой, задаваясь шагом OA и направлением вращения.

Эвольвента окружности (рис. 7.7) – кривая, образующаяся точками касательной прямой, катящейся без скольжения по неподвижной окружности.

На рис. 7.7. показано построение эвольвенты окружности диаметра D в указанном направлении и начальном положении точки A (точка A_0).

Через точку A_0 проводим касательную к окружности и на ней откладываем длину заданной окружности πD. Полученный отрезок и окружность делят на одинаковое число частей (12) и через точки деления окружности проводят в одном направлении касательные к ней. На каждой касательной откладывают отрезки $1A_1$, $2A_2$, $3A_3$ и т. д., равные соответственно A_01, A_02, A_03 и т. д. Полученные точки соединяем плавной кривой.

Синусоида (рис. 7.8) – кривая, характеризующая изменение синуса угла в зависимости от величины центрального угла.

Расстояние между крайними точками синусоиды по высоте, равное диаметру производящей окружности, называется амплитудой. Расстояние $T = 2\pi R$ – шаг синусоиды. Построение точек синусоиды (A, A_1, A_2, …, A_{12}) показано на рис. 7.8.

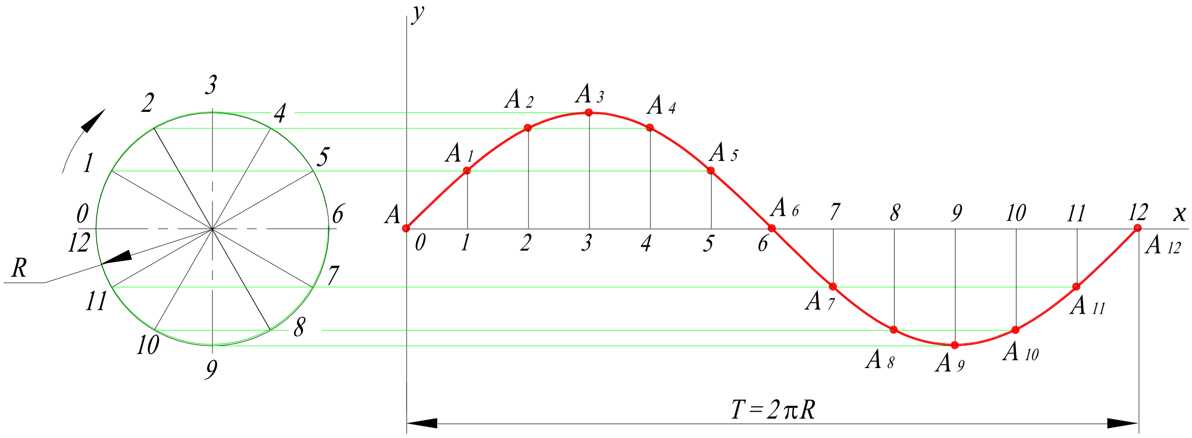


Рис. 7.8

Цилиндрическая винтовая линия (гелиса) – пространственная кривая, которая образуется на поверхности цилиндра вращения в результате двойного равномерного движения точки – вращения вокруг оси цилиндра и поступательного движения вдоль образующей цилиндра (рис. 7.9).

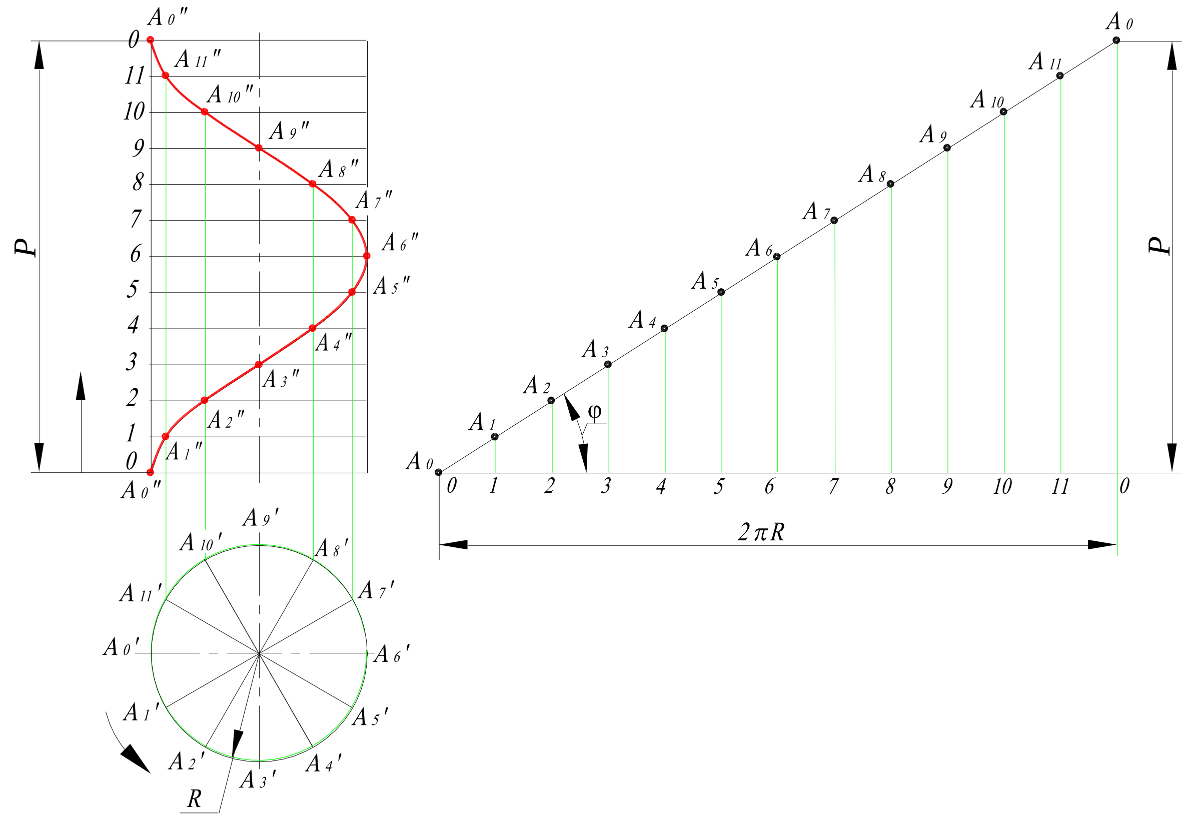


Рис. 7.9

Шаг винтовой линии (P) – расстояние между двумя ее соседними витками в направлении, параллельном оси. Для построения цилиндрической винтовой линии делим окружность основания цилиндра и шаг P винтовой линии на равное число частей (12). Определяем соответствующие фронтальные проекции перемещаемой точки (A_0, A_1, …, A_0) и соединяем их плавной кривой.

Горизонтальная проекция цилиндрической винтовой линии – окружность, а фронтальная – синусоида. Разверткой цилиндрической винтовой линии (A_0, A_1, A_2, …, A_0) является прямая.

Угол φ – угол подъема винтовой линии: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{P}{2\pi R}$.

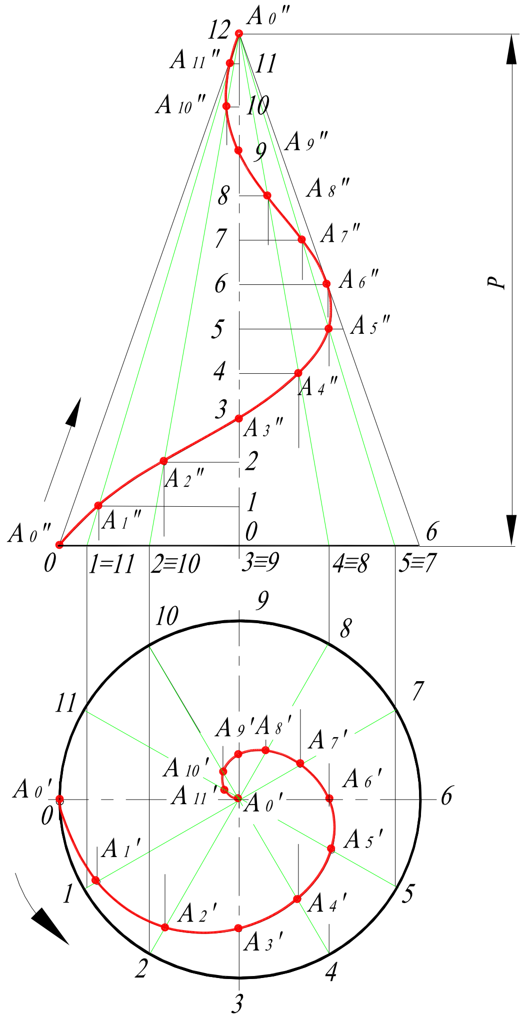


Рис. 7.10

Различают правые и левые винтовые линии. У правой подъем слева вверх направо, у левой – справа вверх налево.

Коническая винтовая линия (рис. 7.10) – пространственная кривая, которая образуется на поверхности конуса вращения в результате двойного равномерного движения точки – вращения вокруг оси конуса и поступательного движения вдоль образующей конуса.

Шаг конической винтовой линии (P) – величина прямолинейного перемещения точки в направлении оси конуса при полном обороте вокруг оси.

Для построения проекций конической винтовой линии разделим окружность основания конуса и шаг P на равное число частей (12). Проводим проекции образующих конуса и определим на них положение соответствующих проекций точек A_0, A_1, A_2, …, A_0 и соединим их плавной кривой.

Горизонтальная проекция винтовой линии – спираль Архимеда, а фронтальная – затухающая синусоида (синусоида с уменьшающейся амплитудой).

7.3. Образование и классификация кривых поверхностей

Различают три основных способа задания поверхности:

- аналитический (поверхность задается уравнением);
- каркасный (поверхность задается совокупностью точек или линий);
- кинематический (поверхность образуется непрерывным перемещением в пространстве какой-либо линии поверхности).

В начертательной геометрии в основном рассматривается кинематический способ образования поверхности.

Перемещающаяся в пространстве линия или поверхность, которая при движении может сохранять или изменять свою форму, называется *образующей*.

Закон перемещения образующей обычно определяется другими линиями (иногда точками), называемыми *направляющими*, по которым скользит образующая при своем движении, а также условием движения образующей.

Совокупность геометрических элементов и условий, которые определяют поверхность в пространстве, называют *определителем*.

Следует отметить, что одна и та же поверхность может быть получена различными способами. Например, цилиндрическую поверхность получают в результате перемещения прямолинейной образующей по кривой направляющей или движением кривой образующей по прямолинейной направляющей.

Для большей наглядности изображения поверхностей в ряде случаев используют ее *очерк* – границы видимости на плоскостях проекций. Очерк проекции получается при пересечении с плоскостью проекций проецирующей поверхности, обертывающей данную. Например, очерком сферы является окружность радиуса, равного радиусу сферы.

В зависимости от формы образующей поверхности разделяются на *линейчатые* (образующая – прямая линия) и *нелинейчатые* (криволинейная образующая).

Линейчатые поверхности называются *развертывающимися*, если их можно совместить с плоскостью без разрывов и складок. *Неразвертывающиеся* поверхности не могут быть совмещены с плоскостью без наличия разрывов и складок.

Поверхности с постоянной образующей – поверхности, образующая которых не изменяет своей формы при образовании поверхности. Поверхности с переменной образующей – поверхности, образующая которых изменяется при образовании поверхности.

В зависимости от формы образующей и закона ее перемещения в пространстве поверхности можно условно разделить на группы, указанные на рис. 7.11.

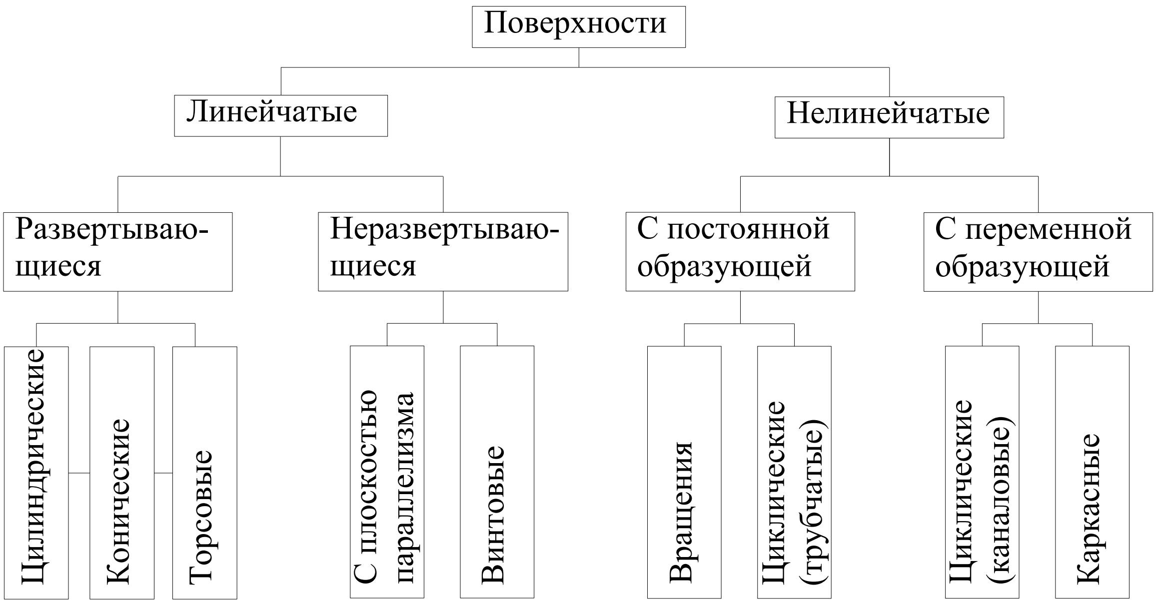


Рис. 7.11

7.4. Линейчатые поверхности

Цилиндрическая поверхность (рис. 7.12) образуется движением прямой линии l (образующей), пересекающей кривую линию m (направляющую) и имеющей постоянное направление S.

Коническая поверхность (рис. 7.13) образуется движением прямой линии l (образующей), пересекающей кривую m (направляющую) и проходящей во всех своих положениях через неподвижную точку S (вершину конической поверхности).

При задании цилиндрических и конических поверхностей на чертеже в качестве направляющей часто используют линию пересечения поверхности с одной из плоскостей проекций.

На рис. 7.12 показано построение линии пересечения заданной цилиндрической поверхности с горизонтальной плоскостью проекций. Образующая l (l_1, l_2, l_3, l_4) при своем движении, пересекаясь с плоскостью проекций π_1, дает точки M_1, M_2, M_3, M_4. Кривая, проведенная через эти точки, является линией пересечения (следом) цилиндрической поверхности с плоскостью проекций π_1.

На рис. 7.13 показано построение линии пересечения конической поверхности с горизонтальной плоскостью проекций.

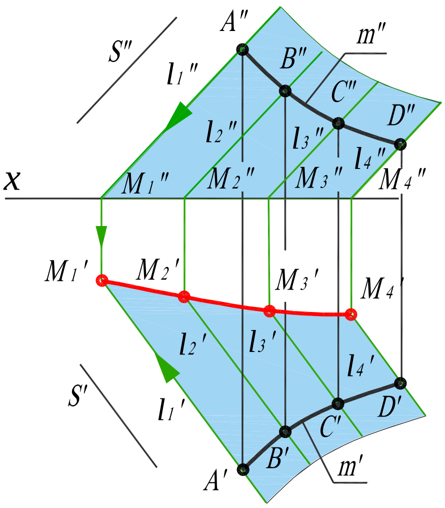


Рис. 7.12

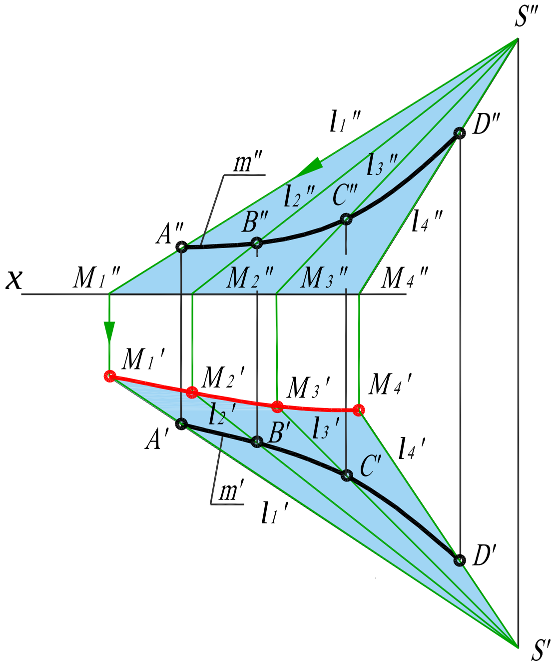


Рис. 7.13

Цилиндрическая поверхность является частным случаем конической, у которой вершина S удалена в бесконечность.

Торсовая поверхность (поверхность с ребром возврата) образуется движением прямолинейной образующей l (во всех своих положениях касающейся некоторой пространственной кривой m (рис. 7.14).

Образующая занимает положения l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 касательно кривой m (ребра возврата) в точках A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

Коническую и цилиндрическую поверхности можно рассматривать как частные случаи торса, когда ее ребро возврата вырождается в точку (конечную или бесконечно удаленную).

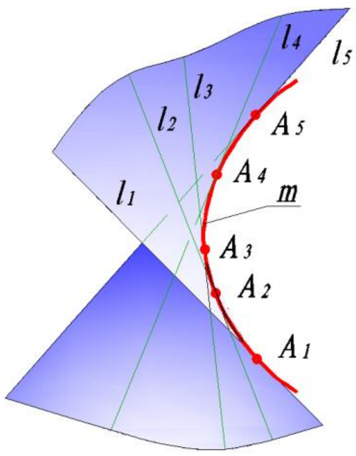


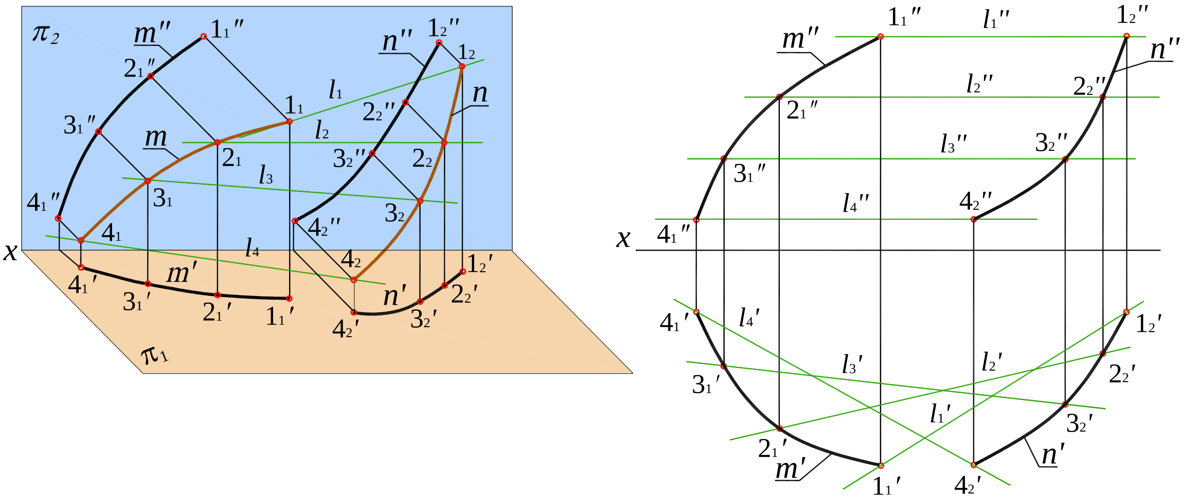
Рис. 7.14

Цилиндрическая, коническая и торсовая поверхности являются *развертывающимися*.

Поверхности с плоскостью параллелизма (поверхности Каталана) образуются движением прямолинейной образующей, параллельной некоторой заданной плоскости (плоскости параллелизма) и пересекающей две заданные линии (направляющие).

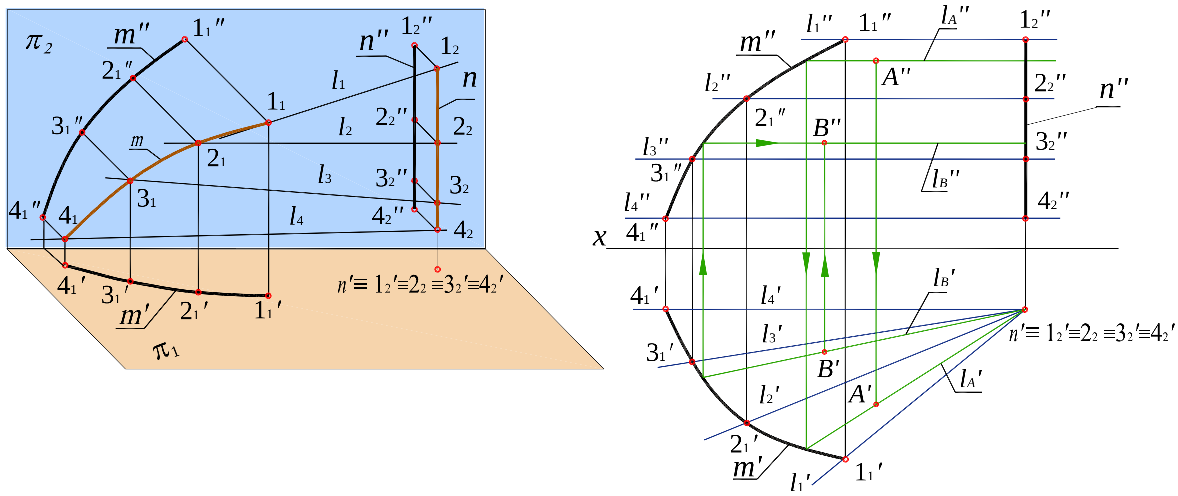
Цилиндроид (рис. 7.15) получают движением прямолинейной образующей l (l_1, l_2, l_3, l_4) по двум криволинейным направляющим m и n, причем во всех положениях образующая остается параллельной плоскости параллелизма π_1.

Коноид (рис. 7.16) образуется движением прямолинейной образующей l (l_1, l_2, l_3, l_4) по двум направляющим, из которых одна m – кривая, а другая n – прямая. При этом во всех положениях образующая остается параллельной плоскости параллелизма π_1 (направляющая n – горизонтально-проецирующая).



а *б*

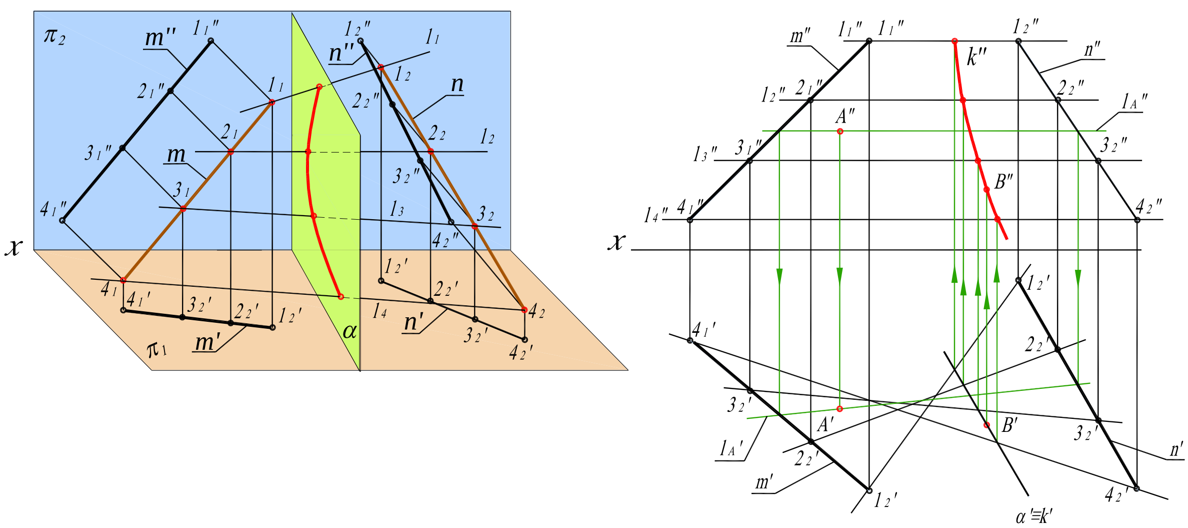
Рис. 7.15



а *б*

Рис. 7.16

Косая плоскость (гиперболический параболоид) образуется движением прямолинейной образующей l (l_1, l_2, l_3, l_4) по двум направляющим – скрещивающимся прямым линиям (m и n) – параллельно плоскости параллелизма π_1 (рис. 7.17).



а *б*

Рис. 7.17

При пересечении косой плоскости плоскостями кроме прямых линий могут получиться параболы и гиперболы, чем и объясняется ее название – гиперболический параболоид.

Поверхности с плоскостью параллелизма имеют применение в архитектуре, строительстве, в конструировании технических форм.

Винтовые поверхности получаются винтовым перемещением образующей линии.

Линейчатые винтовые поверхности (образующая – прямая линия) называются *геликоидами*.

Прямой геликоид (рис. 7.18) образуется движением прямой, которая пересекает винтовую линию, а также ось винтовой линии *i* под прямым углом.

Поскольку образующая перпендикулярна оси винтовой линии, то она параллельна плоскости проекций π_1. Поэтому другое название прямого геликоида – винтовой коноид.

Косой геликоид (рис. 7.19) образуется движением прямой, которая пересекает винтовую линию и ось винтовой линии *i* под постоянным углом, не равным 90°.

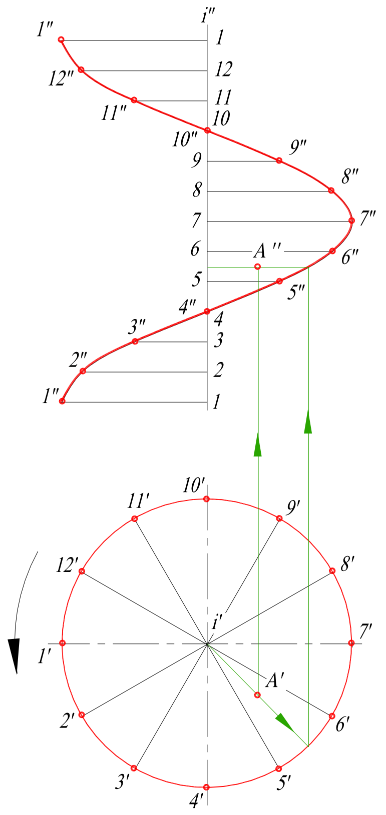


Рис. 7.18

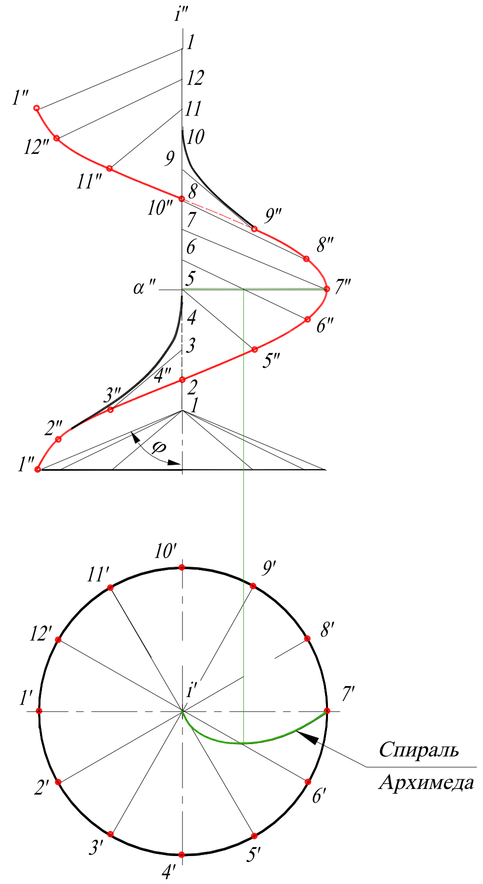


Рис. 7.19

Кривая пересечения поверхности косого геликоида плоскостью α (α'') перпендикулярной оси винтовой линии – спираль Архимеда. Поэтому другое название косого геликоида – Архимедов геликоид.

Образующая косого геликоида пересекает ось винтовой линии *i* под углом φ (рис. 7.19). Для определения фронтальных проекций образующих может быть использован направляющий конус, образующие которого составляют с осью *i* угол φ. Фронтальный очерк поверхности косого геликоида ограничен фронтальной проекцией винтовой линии и кривыми, огибающими ряд положений образующей линии.

Винтовой торс (рис. 7.20) – поверхность с ребром возврата, которым является цилиндрическая винтовая линия. Эта поверхность образуется перемещением прямолинейной образующей, во всех своих положениях касающейся цилиндрической винтовой линии.

Поскольку это поверхность развертываемая, то другое ее название – *развертываемый геликоид*.

Кривая пересечения поверхности винтового торса поверхностью α (α''), перпендикулярной оси винтовой линии i – эвольвента окружности. Отсюда и другое ее название – *эвольвентный геликоид*.

Прямолинейная образующая, касаясь винтовой линии в точках 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, пересекается с горизонтальной плоскостью проекций в точках M_1, M_2, M_3, …, M_8 и образует с ней постоянный угол φ, равный углу подъема винтовой линии.

Если прямолинейная образующая скользит по винтовой линии, а с плоскостью π_1 образует угол, не равный углу подъема винтовой линии, то образуется *конволютный геликоид*.

Винтовой цилиндроид (рис. 7.21) образуется движением прямолинейной образующей по двум криволинейным направляющим (винтовым линиям m и n), причем во всех положениях образующая остается параллельной плоскости параллелизма π_1.

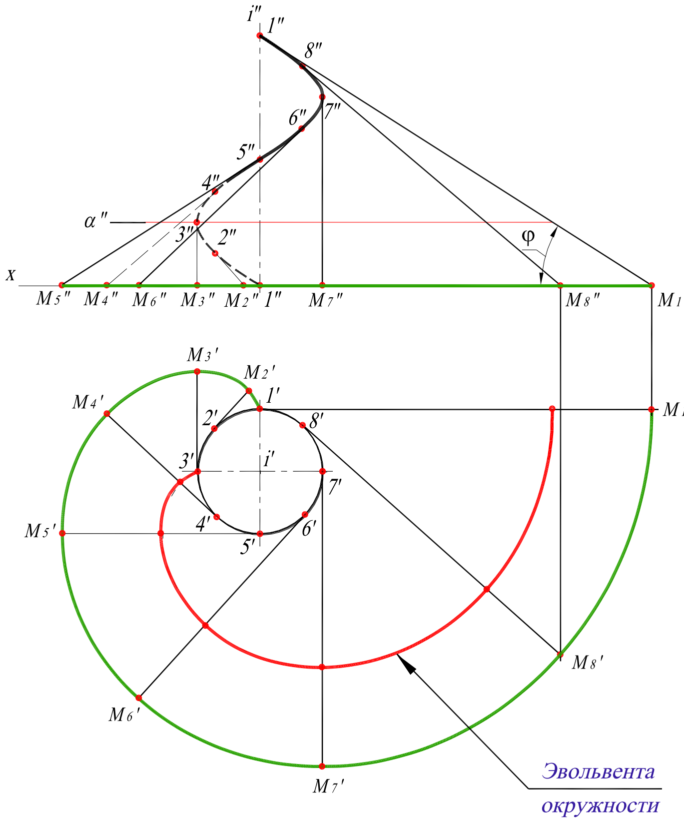
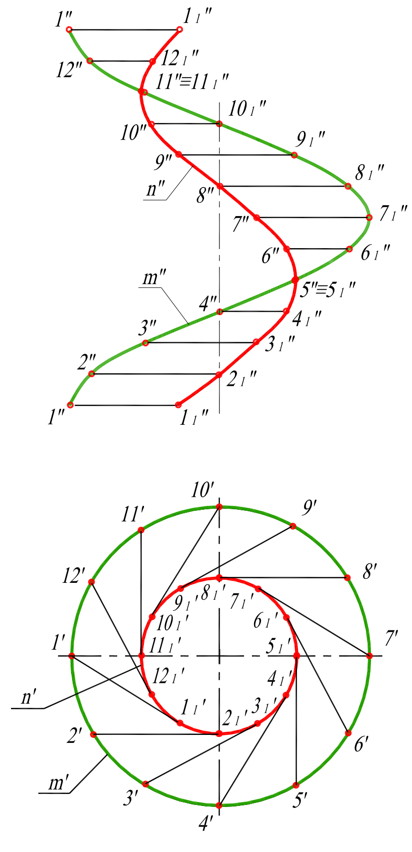


Рис. 7.20



7.21

Геликоиды имеют широкое применение в технике (различные профили резьб, рабочие поверхности червяков червячных передач, червячные фрезы, винтовые транспортеры и пр.) и в строительстве (винтовые лестницы и винтовые въезды, откосы насыпи и выемки полотна железной дороги на кривой с подъемом).

7.5. Поверхности вращения

Поверхность вращения (рис. 7.22) получается вращением прямолинейной или криволинейной образующей l вокруг неподвижной прямой i – оси поверхности. За ось вращения обычно принимается вертикальная прямая. Каждая точка образующей (например, точка A) описывает при своем вращении окружность с центром на оси i. Эти окружности называются *параллелями*. Наибольшая из этих параллелей – *экватор*, наименьшая – *горло*.

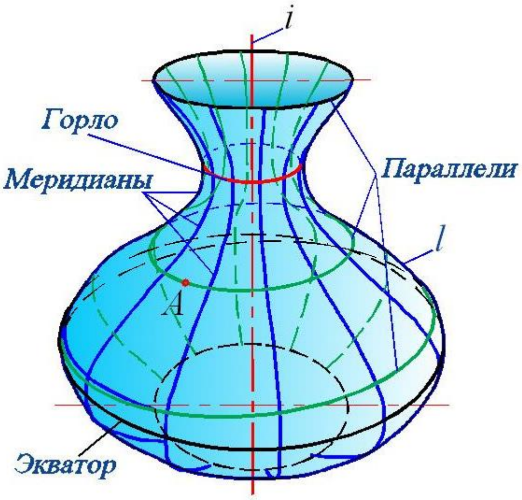


Рис. 7.22

Плоскости, проходящие через ось вращения, пересекают поверхность по *меридианам*. Меридиан, расположенный в плоскости, параллельной π_2, называется *главным*.

Поверхность вращения называют *закрытой*, если криволинейная образующая пересекает ось поверхности в двух точках. Если образующая – прямая линия, то получается *линейчатая поверхность вращения*, если кривая – *нелинейчатая*.

Замкнутую область пространства вместе с ее границей (поверхностью) называют *геометрическим телом*.

Цилиндр вращения (рис. 7.23) образуется вращением прямой l вокруг параллельной ей оси i. Все точки образующей l (например, точка A) описывают окружности (параллели), равные окружностям оснований цилиндра.

Конус вращения (рис. 7.24) образуется вращением прямой l вокруг пересекающейся с ней оси i. Все точки образующей l описывают окружности различных радиусов (для точки A – радиус R_a). Величина радиуса изменяется от нуля до радиуса окружности основания конуса.

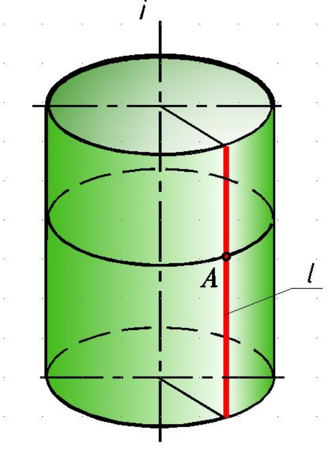


Рис. 7.23

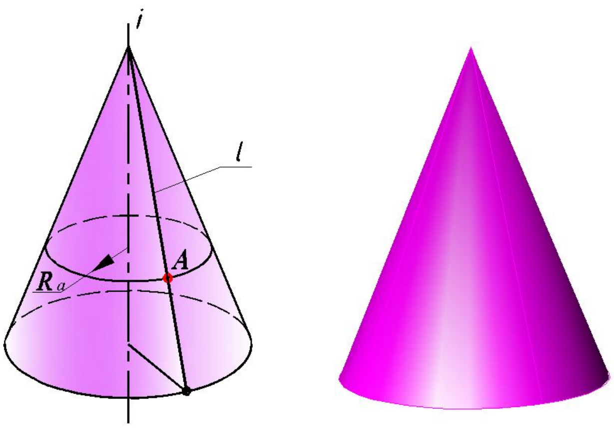


Рис. 7.24

Однополостный гиперболоид вращения (рис. 7.25) образуется вращением прямой l вокруг скрещивающейся с ней оси i. Точки образующей l описывают окружности переменных радиусов (для точки A – радиус R_a). Радиус параллели наименьшего радиуса (горла) равен кратчайшему расстоянию между образующей l и осью i.

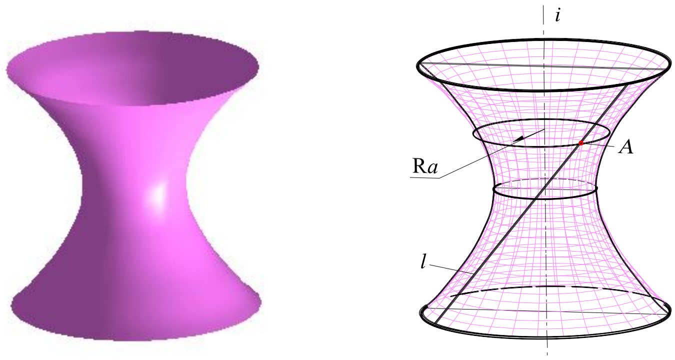


Рис. 7.25

Сфера (рис. 7.26) образуется вращением окружности вокруг ее диаметра. Точки образующей окружности описывают окружности переменных радиусов. Точка *A* описывает параллель наибольшего радиуса (экватор). Для сферы экватор и меридианы – равные между собой окружности.

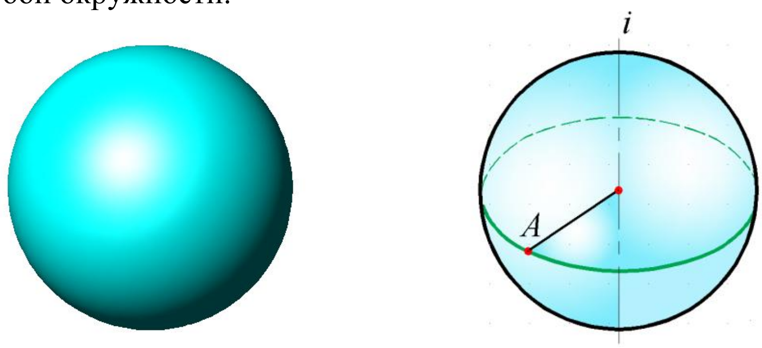


Рис. 7.26

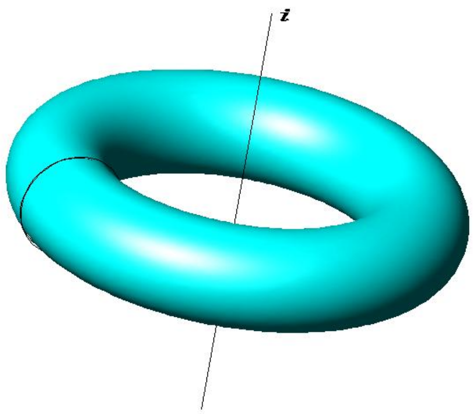


Рис. 7.27

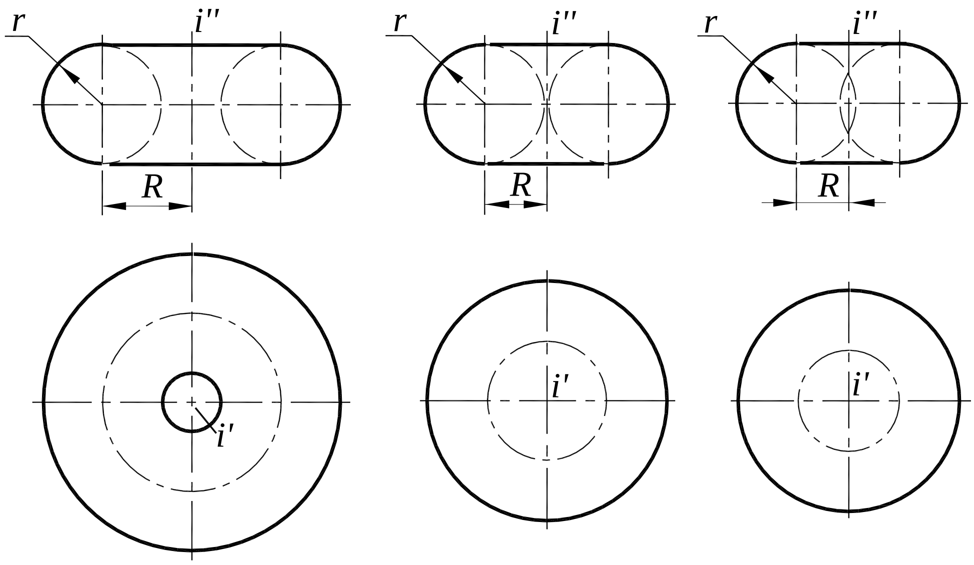
Тор (рис. 7.27) образуется вращением окружности вокруг оси *i*, лежащей в плоскости окружности, но не проходящей через ее центр. В зависимости от взаимного расположения образующей окружности и оси вращения различают:

а) открытый тор (круговое кольцо) (рис. 7.28, *а*), $\frac{r}{R}<1$;

б) замкнутый (рис. 7.28, *б*), $\frac{r}{R}=1$;

в) самопересекающийся (рис. 7.28, *в*), $\frac{r}{R}>1$.

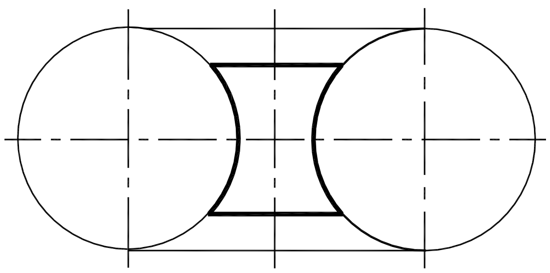
Внутреннюю часть открытого тора в технике называют *глобоидом* (рис. 7.29). Пример применения – глобоидная червячная передача.

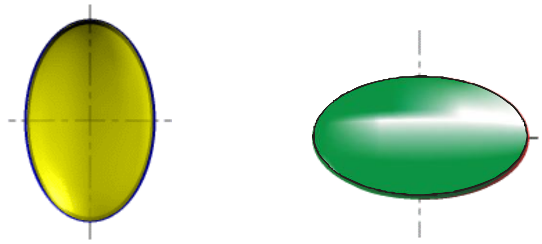


а *б* *в*

Рис. 7.28

Эллипсоид вращения образуется вращением эллипса вокруг его оси. При вращении эллипса вокруг его большой оси получается вытянутый эллипсоид (рис. 7.30, *а*), при вращении вокруг малой – сжатый эллипсоид (рис. 7.30, *б*). Для эллипсоида вращения меридианом является эллипс.



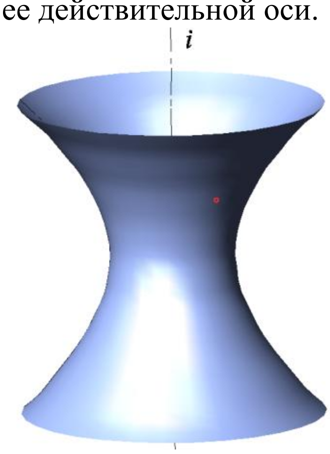


а *б*

Рис. 7.29 Рис. 7.30

Однополостный гиперболоид вращения (рис. 7.31) образуется вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси.

Двуполостный гиперболоид вращения (рис. 7.32) получается вращением гиперболы вокруг ее действительной оси.



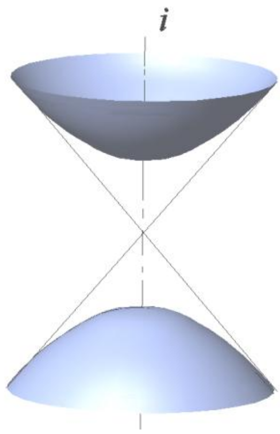


Рис. 7.31 Рис. 7.32

Меридианами гиперболоидов вращения являются гиперболы.

Параболоид вращения (рис. 7.33) образуется вращением параболы вокруг ее оси. Меридианом параболоида вращения является парабола.

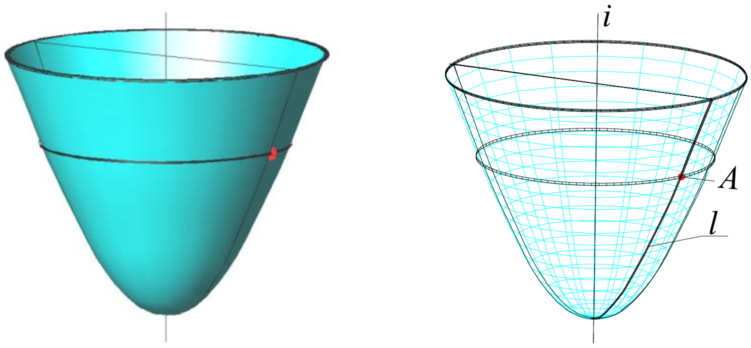


Рис. 7.33

Поверхности вращения: цилиндр, конус, однополостный гиперболоид – являются также и линейчатыми поверхностями.

Тор является поверхностью четвертого порядка, что соответствует максимальному числу точек пересечения поверхности с прямой линией. Все остальные перечисленные выше поверхности вращения являются поверхностью второго порядка.

7.6. Циклические и каркасные поверхности

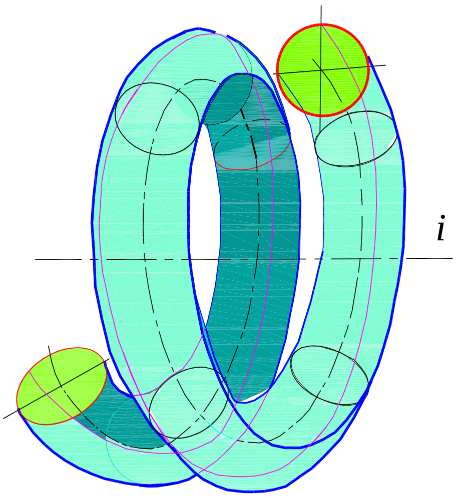


Рис. 7.34

Циклическая поверхность образуется окружностью постоянного или переменного радиуса при ее произвольном движении.

Каналовая поверхность образуется движением окружности переменного радиуса вдоль кривой направляющей, причем плоскость образующей окружности остается перпендикулярной к заданной направляющей, по которой движется центр окружности. Если радиус образующей окружности постоянен, то такая каналовая поверхность называется *трубчатой*.

Когда направляющей кривой является цилиндрическая винтовая линия, образуется трубчатая винтовая поверхность (рис. 7.34). Она может быть получена и движением сферы постоянного диаметра, центр которой перемещается по цилиндрической винтовой линии. Примером такой поверхности является поверхность цилиндрической пружины с круглым сечением витков.

Каркасными называют поверхности, заданные некоторым числом линий; каркас поверхности может быть получен линиями пересечения ее плоскостями, параллельными плоскостям проекций.

Примером каркасных поверхностей могут служить поверхности корпусов судов, самолетов, автомобилей. К разряду каркасных поверхностей относится и топографическая поверхность. Она изображается совокупностью горизонталей, т. е. линий, получаемых в сечении земной поверхности горизонтальными плоскостями.

7.7. Построение точек, лежащих на геометрических телах и поверхностях

Точка принадлежит поверхности в том случае, когда она находится на линии, принадлежащей этой поверхности. В качестве таких линий могут быть выбраны образующие, параллели, меридианы и др. Поверхность цилиндра вращения (рис. 7.35) является горизонтально-проецирующей, образующие цилиндра перпендикулярны горизонтальной плоскости проекций, вследствие чего поверхность цилиндра проецируется на эту плоскость окружностью.

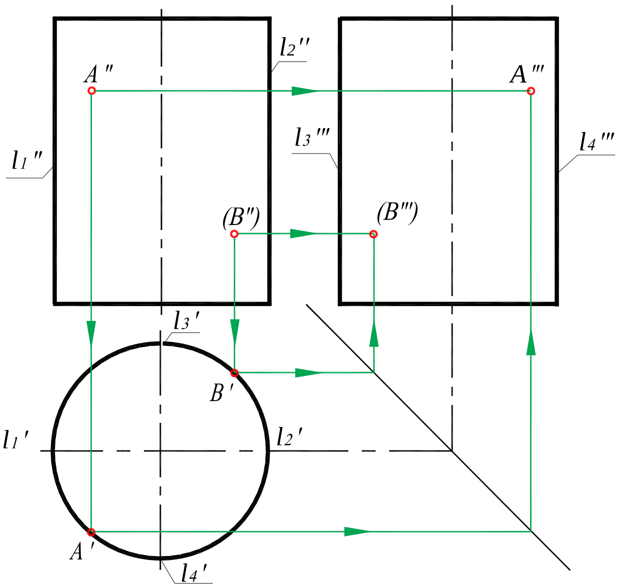


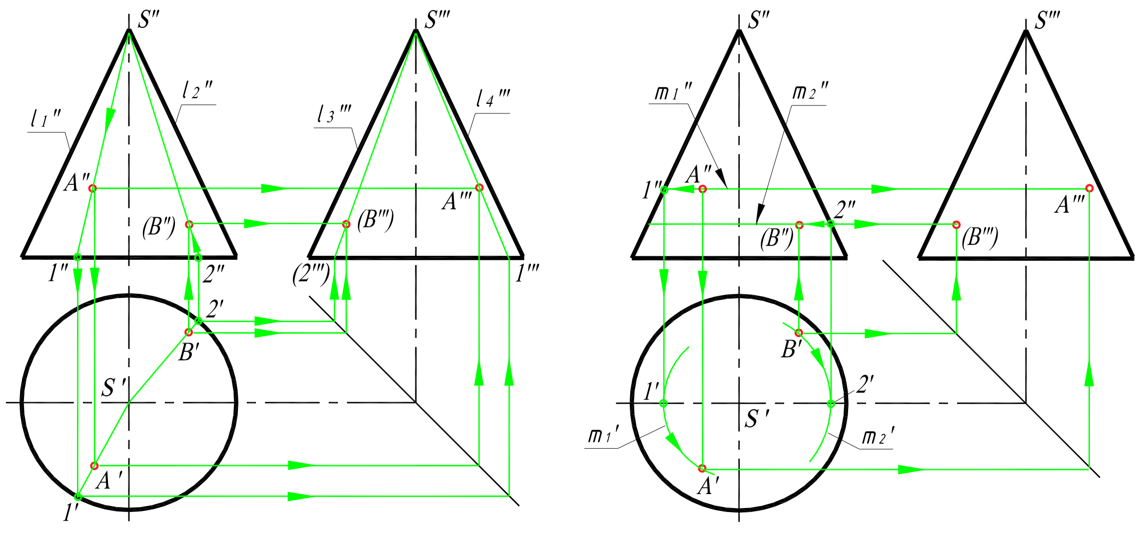
Рис. 7.35

Горизонтальные проекции точек A и B (A' и B') лежат на окружности. Профильные проекции этих точек A''' и B''' находятся при помощи линий.

Очерковые образующие цилиндра разделяют фронтальную и профильные проекции на видимую и невидимые части. Так, образующие l_1 и l_2 делят цилиндрическую поверхность на видимую спереди и невидимую, образующие l_3 и l_4 – на видимую слева и невидимую. Невидимые проекции точек указаны в скобках.

Конус вращения является также и линейчатой поверхностью, поэтому для построения точек на его поверхности можно использовать и образующие и параллели.

На рис. 7.36, *а* показано построение горизонтальной A' и профильной A''' проекций точки A по заданной фронтальной проекции A''.



а *б*

Рис. 7.36

Если задана горизонтальная проекция B' точки B, то построение начинается с проведения горизонтальной проекции $S'\ 2'$ образующей $S2$, на которой находится точка B. Определив фронтальную проекцию $S''\ 2''$ этой образующей, по линиям связи находим фронтальную проекцию B'' точки B, а затем и профильную B'''.

Образующие l_1 и l_2 разделяют коническую поверхность на видимую спереди и невидимую, а образующие l_3 и l_4 – на видимую слева и невидимую.

Проекции B'' и B''' находятся на невидимой части конуса. Горизонтальная проекция поверхности конуса является видимой.

На рис. 7.36, *б* показано построение недостающих проекций точек A и B при помощи параллелей. Через заданные проекции A'' и B' проводятся проекции m''_1 и m_2' параллелей m_1 и m_2. Используя точки 1 и 2, лежащие на очерковых образующих, определим положение проекций m'_1 и m''_2 проведенных параллелей. По линиям связи найдем положение проекций A' и A''' точки A и проекций B'' и B''' точки B.

На рис. 7.37 приведены проекции сферы, которые ограничены экватором K, фронтальным меридианом m и профильным n. Каждый из них проецируется на соответствующую плоскость проекций в натуральную величину (окружность), на остальные – в виде отрезков прямых длиной, равной диаметру сферы. На этом же рисунке показано построение недостающих проекций точек A, B и C по заданным фронтальным проекциям этих точек. Точка A находится на экваторе K, точка B – на фронтальном меридиане m, точка C – на профильном меридиане n. Недостающие проекции определяются при помощи линий связи (проведение линий связи на рисунке показано стрелками).

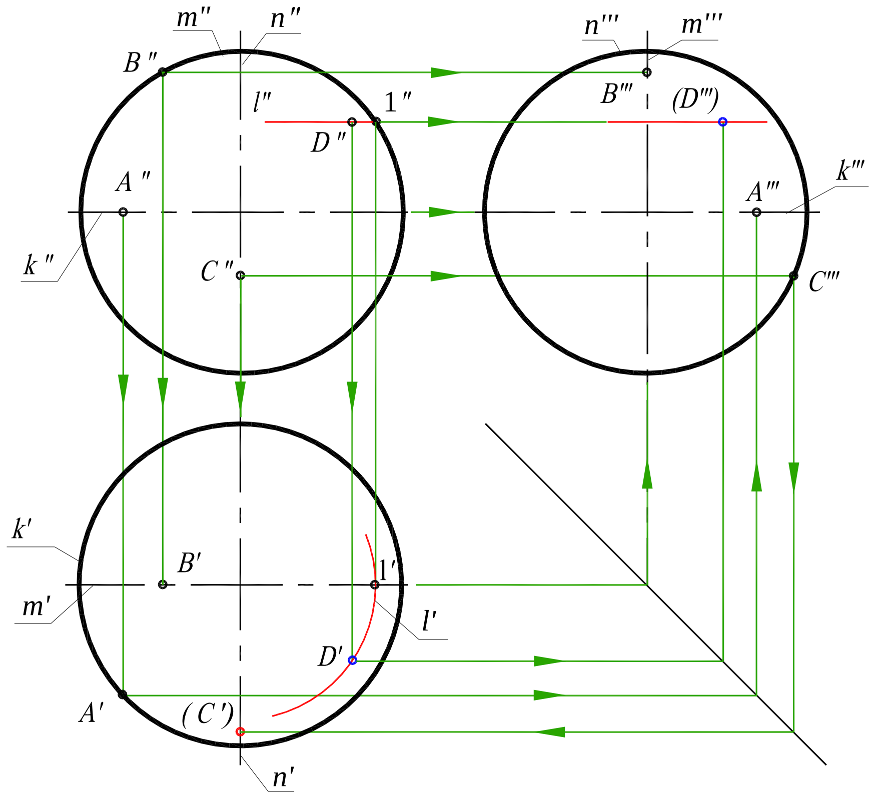


Рис. 7.37

Экватор K разделяет сферу на видимую (верхняя половина) на горизонтальной проекции и невидимую части. Фронтальный меридиан m разделяет сферу на видимую (ближняя половина) и невидимую части на фронтальной проекции.

Профильный меридиан n разделяет сферу на видимую (левая половина) и невидимую части на профильной проекции.

Так, на рис. 7.37 горизонтальная проекция C' точки C невидимая (взята в скобки), так как находится на нижней (невидимой) половине сферы. На поверхности сферы можно провести множество параллелей, параллельно соответствующим плоскостям проекций. Эти параллели используются для построения проекций точек на сфере.

По данной фронтальной проекции D'' точки D найдена горизонтальная D' как принадлежащая горизонтальной параллели l. Для построения горизонтальной проекции l' использована точка 1, принадлежащая фронтальному меридиану. Профильная проекция D''' точки D построена при помощи линий связи и находится на невидимой (правой половине) части сферы.

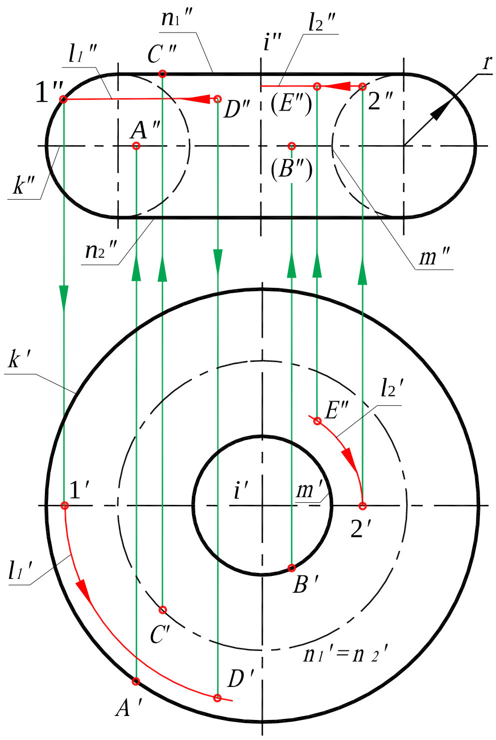


Рис. 7.38

На рис. 7.38 представлены проекции открытого тора (кругового кольца), полученного вращением окружности радиуса r вокруг оси i. Проекции экватора обозначены k, горла – m, крайних параллелей – n_1 (верхняя) и n_2 (нижняя). Стрелками на рисунке показано построение фронтальных проекций точек A, B, C по заданным горизонтальным, расположенных соответственно на экваторе k, горле m, и крайней (верхней) параллели n_1.

Для построения горизонтальной проекции D' точки D через фронтальную проекцию D'' проведена фронтальная проекция l''_1 параллели l_1. Горизонтальная проекция l'_1 параллели l_1 построена при помощи точки 1, лежащей на образующей окружности. Горизонтальная проекция точки D' найдена при помощи линий связи как принадлежащая параллели l_1.

Для построения фронтальной проекции точки E (по заданной горизонтальной), лежащей на внутренней части тора (рис. 7.38), использована параллель l_2. Фронтальная проекция этой параллели строится при помощи точки 2, принадлежащей образующей окружности. Экватор k разделяет тор на видимую (верхняя половина) и невидимую части на горизонтальной проекции. На фронтальной проекции видимой является ближняя наружная часть открытого тора.

7.8. Примеры решения задач

Задача 1. Построить недостающие проекции линий, принадлежащих поверхности сферы (рис. 7.39).

Решение. На рис. 7.39 задана горизонтальная проекция линий AB и BC, находящихся на поверхности сферы. Любая плоская кривая сферы является окружностью. Так как линия AB – фронтальная параллель, то фронтальная проекция ее – дуга $A''1''B''$, а профильная – прямая $A'''1'''B'''$. Точки A и B расположены на экваторе сферы. Кривая BC также является частью окружности, но на фронтальную и профильную плоскости проекций она проецируется в виде эллиптических кривых. Построение проекций этих кривых сводится к построению отдельных точек (2, 3, 4, 5, 6), для нахождения которых использованы вспомогательные фронтальные параллели (см. построение точки *B* на рис. 7.37). Точка *C* принадлежит экватору сферы.

Профильные проекции точек определяются при помощи линий связи. Полученные точки соединены плавной кривой.

Видимые части проекций кривых расположены на видимых полушариях сферы.

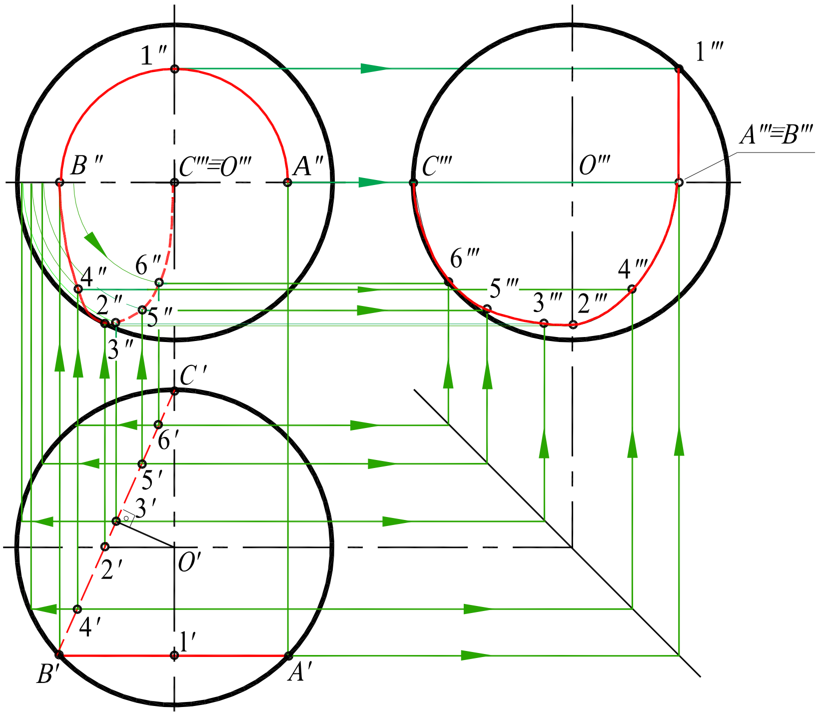


Рис. 7.39

Задача 2. Построить недостающие проекции линии, принадлежащей поверхности открытого тора (рис. 7.40).

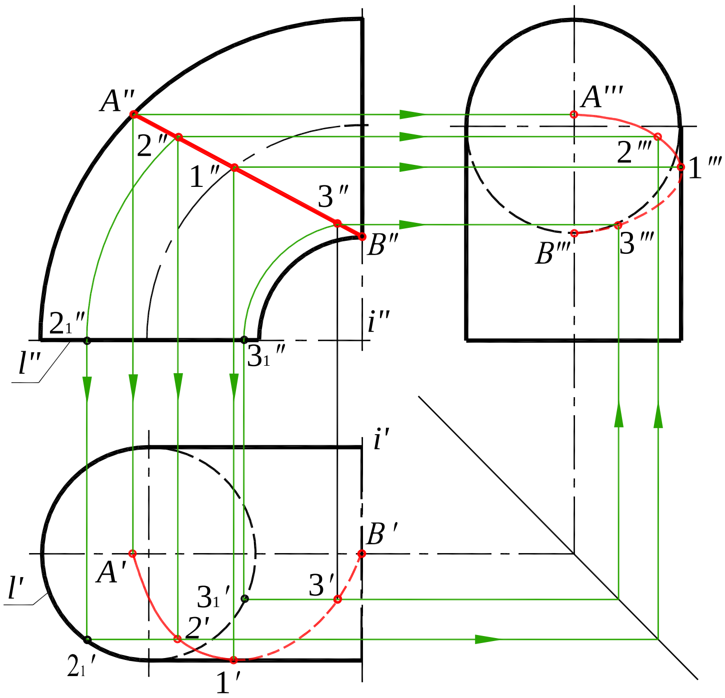


Рис. 7.40

Решение. На рис. 7.40 задана фронтальная проекция линии *AB*, находящейся на поверхности части открытого тора, полученного вращением образующей окружности *l* вокруг фронтально-проецирующей оси *i*. Линия *AB* является плоской кривой, для построения недостающих проекций которой следует построить ряд точек (*A*, *B*, 1, 2, 3), принадлежащих этой кривой.

Построение точек на поверхности тора приведено на рис. 7.38. Точка *A* находится на экваторе, точка *B* – на горле, а точка 1 – на крайней (ближней) параллели тора. Поэтому горизонтальные проекции этих точек определяются при помощи линий связи.

Для построения горизонтальных проекций 2′, 3′ точек 2 и 3 приведены фронтальные проекции параллелей, проходящих через эти точки (дуги окружностей). Для построения горизонтальных проекций этих параллелей использованы точки 2_1 и 3_1, лежащие на образующей окружности *l*.

Профильные проекции точек кривой определяются при помощи линий связи.

Полученные проекции точек соединяются плавной кривой. Видимыми проекциями кривой являются те участки, которые расположены на видимых частях тора.

Задача 3. Построить фронтальную проекцию линии *AB*, принадлежащую поверхности коноида (рис. 7.41).

Решение. На рис. 7.41 задана горизонтальная проекция линии *AB*, принадлежащей поверхности коноида. Коноид определяется двумя направляющими – *m* (кривая) и *n* (прямая), и плоскостью параллелизма α (горизонтально-проецирующая плоскость).

Линия *AB* является плоской кривой, для построения фронтальной проекции которой следует определить фронтальные проекции ряда точек (*A*, 1, 2, 3, *B*).

Фронтальные проекции *A*″ и *B*″ точек *A* и *B* определяются при помощи линий связи как принадлежащие направляющим *m* и *n*.

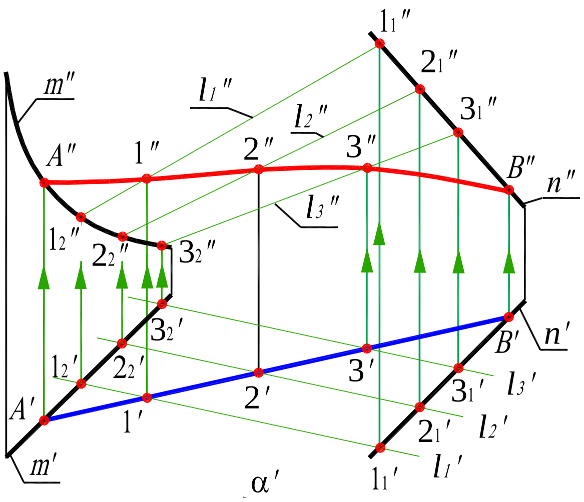


Рис. 7.41

Фронтальные проекции 1″, 2″, 3″ точек 1, 2, 3 определяются при помощи образующих l_1, l_2, l_3. Горизонтальные проекции этих образующих проходят через проекции 1′, 2′, 3′ точек 1, 2, 3 параллельно плоскости параллелизма α.

Фронтальные проекции образующих 1″, 2″, 3″ определяются с использованием точек 1_1, 1_2, 2_1, 2_2, 3_1, 3_2, которые принадлежат направляющим *m* и *n*.

Полученные фронтальные проекции точек *A*″, 1″, 2″, 3″, *B*″ соединяются плавной кривой.

7.9. Вопросы для контроля

1. Перечислите плоские лекальные кривые.
2. Как образуется цилиндрическая винтовая линия?
3. Перечислите линейчатые поверхности (развертывающиеся и неразвертывающиеся).
4. Как образуются поверхности с плоскостью параллелизма (цилиндроид, коноид, косая плоскость)?
5. Как образуются линейчатые винтовые поверхности (геликоиды)? Дайте им название.
6. Как образуются поверхности вращения?
7. Перечислите линейчатые поверхности вращения.
8. Перечислите нелинейчатые поверхности вращения.
9. Как образуется поверхность тора? Назовите его разновидности.